

# *n*ième Épaisseur dans les Espaces de Sobolev

AMAR EL KOLLI

*Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Alger, Algeria*

*Communicated by G. G. Lorentz*

## I. INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'évaluation de la *n*ième épaisseur de la boule unité d'un espace de Sobolev pour la norme d'un autre espace de Sobolev. Cette notion a été introduite par Kolmogorov [7].

Dans la première partie nous considérons des espaces de Sobolev avec poids et généralisons une partie des résultats de Birman et Solomjak [3].

Le cas hilbertien nous permet de donner en application le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique dégénéré qui rejoint l'étude faite par Baouendi et Goulaouic [2].

Dans la seconde partie nous généralisons les résultats pour les espaces de Sobolev d'ordre non entier.

Dans la troisième partie on s'intéresse à un espace avec deux poids.

Je remercie Grisvard et Zerner qui m'ont suggéré ce travail et dont l'aide m'a été précieuse.

## II. DÉFINITIONS

### 1. *n*-ième épaisseur dans un espace vectoriel normé

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ , on appelle, selon Kolmogorov, *n*ième épaisseur de  $A$  dans  $E$  le nombre

$$d_n(A, E) = \inf_{E_n \in G_n(E)} \sup_{x \in A} \inf_{y \in E_n} \|x - y\|_E$$

où  $G_n(E)$  désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $n$  de  $E$ .

On a les propriétés suivantes:

(1)  $d_0(A, E)$  est le rayon de la plus petite boule centrée à l'origine contenant  $A$ .

(2)  $d_n(\alpha A, E) = \alpha \cdot d_n(A, E) \quad (\alpha \geq 0)$ .

(3)  $A \subset B \Rightarrow d_n(A, E) \leq d_n(B, E)$ .

(4)  $d_n(A, E) = 0 \Leftrightarrow \{\text{Il existe un sous-espace vectoriel de dimension } n \text{ de } E \text{ contenant } A\}$ .

(5) La suite  $d_n$  est décroissante. De plus, pour que  $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  il faut et il suffit que  $A$  soit précompact.

THÉORÈME DE KREIN. Soit  $E_{n+1}$  un sous-espace de dimension  $(n + 1)$  d'un espace de Banach  $E$  et  $U_{n+1}$  la boule unité de  $E_{n+1}$ . Alors

$$d_n(U_{n+1}, E) = 1.$$

Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration de ce théorème dans l'ouvrage de Lorentz [11]. (Dans le cas hilbertien la démonstration est immédiate.)

## 2. Espaces de Sobolev avec poids

On notera  $J$  le pavé ouvert  $]0, 1[^m$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $J = J' \times ]0, 1[$ ,  $x = (x', t)$  où  $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$ . Pour tout multi-indice  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ,  $|\mu| = \sum_{i=1}^m \mu_i$  et  $D^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_m^{\mu_m}$ .

Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $L_{-\beta}^p(J)$  est l'espace des (classes de) fonctions  $u: J \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $t^{-\beta}u \in L^p(J)$ .

$k$  étant un entier positif, on appelle espace de Sobolev  $W_{\alpha}^{k,p}(J)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u: J \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $t^{\alpha}D^{\mu}u$  appartienne à  $L^p(J)$  pour  $|\mu| \leq k$ . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{k,p}(J)}^p = \sum_{|\mu| \leq k} \|t^{\alpha}D^{\mu}u\|_{L^p(J)}^p.$$

Avec la modification habituelle si  $p = +\infty$ .  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(J)$  dans  $W_{\alpha}^{k,p}(J)$ . Sur  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$ ,  $(\sum_{|\mu|=k} \|t^{\alpha}D^{\mu}u\|_{L^p(J)}^p)^{1/p}$  est une norme équivalente à  $\|u\|_{W_{\alpha}^{k,p}(J)}$  si  $\alpha + 1/p \notin \{1, 2, \dots, k\}$  [4]. Nous n'utiliserons d'ailleurs pas cette propriété.

Étant données deux suites  $\{u_n\}$  et  $\{v_n\}$  on dit que  $u_n \approx v_n$  s'il existe deux constantes positives  $A$  et  $B$  telles que  $Au_n \leq v_n \leq Bu_n$  pour " $n$  assez grand."

$SE$  désignera la boule unité d'un espace normé  $E$ .

## III. mÈME ÉPAISSEUR DANS LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

LEMME III.1 (Pierre Grisvard [6]). Pour  $1 < p \leq +\infty$ ,  $k$  entier positif,  $\alpha$  réel tel que  $\alpha + 1/p \notin \{1, 2, \dots, k\}$  on a

$$\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k}^p(J).$$

## Démonstration par récurrence

(1)  $k = 1$  pour  $u \in \mathcal{D}(J)$  on a

$$\begin{aligned}
 |u(x', t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial s} u(x', s) \right| ds \quad \text{si } \alpha + 1/p < 1, \\
 |u(x', t)| &\leq \int_t^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} u(x', s) \right| ds \quad \text{si } \alpha + 1/p > 1, \\
 \int_0^1 dx' \int_0^1 t^{(\alpha-1)p} |u(x', t)|^p dt \\
 &= \int_0^{+\infty} dx' \int_0^{+\infty} t^{(\alpha-1)p} |u(x', t)|^p dt \\
 &\leq \int_0^{+\infty} dx' \left( \frac{p}{|\alpha p - 1 + p|} \right)^p \int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x', t) \right|^p dt \\
 &\quad \text{(Inégalité de Hardy) [19]} \\
 &\leq \left( \frac{p}{|\alpha p - 1 + p|} \right)^p \int_0^1 dx' \int_0^1 t^{\alpha p} \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x', t) \right|^p dt \\
 &\leq C \cdot \|u\|_{\dot{W}_{\alpha}^{1,p}(J)}^p.
 \end{aligned}$$

Le cas  $p = +\infty$  se traite de la même manière.

Comme  $\mathcal{D}(J)$  est dense dans  $\dot{W}_{\alpha}^{1,p}(J)$  cette inégalité se prolonge à  $\dot{W}_{\alpha}^{1,p}(J)$ .

(2) Soit  $u$  un élément de  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$ .

$u, \partial u / \partial x_j$  ( $j = 1, \dots, m-1$ ),  $\partial u / \partial t$  sont des éléments de  $\dot{W}_{\alpha}^{k-1,p}(J)$  donc, d'après l'hypothèse de récurrence, de  $L_{\alpha-k+1}^p(J)$ ; ce qui implique que  $u$  appartient à  $\dot{W}_{\alpha-k+1}^{1,p}(J)$

$$\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow \dot{W}_{\alpha-k+1}^{1,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k}^p(J).$$

LEMME III.2 (P. Bolley et J. Camus [4]). Pour  $1 < p \leq +\infty$ ,  $k$  entier positif,  $\alpha$  réel tel que  $\alpha + (1/p) \notin \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\rho$  réel, l'application

$$u \mapsto t^{\rho} u$$

est un isomorphisme de  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$  sur  $\dot{W}_{\alpha-\rho}^{k,p}(J)$ .

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned}
 \mu &= (\mu', \mu_m) \quad D^{\mu} = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} D^{\mu'} \\
 D^{\mu}(t^{\rho} u) &= \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} D^{\mu'} t^{\rho} u = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} t^{\rho} D^{\mu'} u \\
 &= \sum_{j=0}^{\mu_m} A_j t^{\rho-j} \frac{\partial^{\mu_m-j}}{\partial t^{\mu_m-j}} D^{\mu'} u \quad \text{où } A_j = \rho \cdots (\rho - j + 1) \binom{\mu_m}{j}.
 \end{aligned}$$

Pour  $u \in \dot{W}_\alpha^{k,p}(J)$ ,

$$\frac{\partial^{\mu_m-j}}{\partial t^{\mu_m-j}} D^{\mu'} u \in \dot{W}_\alpha^{k-|\mu'|-\mu_m+j,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k+|\mu'|+\mu_m-j}^p(J)$$

et

$$t^{\rho-j} \frac{\partial^{\mu_m-j}}{\partial t^{\mu_m-j}} D^{\mu'} u \in L_{\alpha-k+|\mu'|+\mu_m-\rho}^p(J) \hookrightarrow L_{\alpha-\rho}^p(J) \quad \text{si } |\mu| \leq k.$$

Ce qui implique que

$$D^\mu(t^\rho u) \in L_{\alpha-\rho}^p(J) \quad \text{pour } |\mu| \leq k.$$

Il est clair que l'application est injective et que la bijection réciproque est l'application  $u \mapsto t^{-\rho} u$ .

**THÉORÈME III.1.1.**<sup>1</sup> *Pour  $1 < p \leq +\infty$ ,  $k$  entier positif,  $\alpha$  et  $\beta$  réels tels que  $\alpha + \beta < k$  posons  $d_n = d_n(S\dot{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J))$ ; alors:*

(1) *Si  $\alpha + \beta < k/m$*

$$d_n \approx n^{-k/m}.$$

(2) *Si  $\alpha + \beta = k/m$  et  $\alpha + (1/p) \notin \{1, 2, \dots, k\}$  il existe une constante positive  $B$  telle que*

$$d_n \leq B \left( \frac{\log n}{n} \right)^{k/m}.$$

(3) *Si  $k/m < \alpha + \beta < k$*

$$d_n \approx n^{-(k-(\alpha+\beta))/(m-1)}.$$

*Démonstration. 1ère partie.* Nous commençons par ramener le problème au cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe sauf pour  $k/m < \alpha + \beta < k$ ,  $\beta < 0$  et  $\alpha + (1/p) \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

(1)  $\alpha < 0$  et  $\beta \geq 0$ .  $\alpha + (1/p) < 1$  et l'application

$$u \mapsto t^\alpha u$$

est un isomorphisme simultanément de  $\dot{W}_\alpha^{k,p}(J)$  sur  $\dot{W}^{k,p}(J)$  et de  $L_{-\beta}^p(J)$  sur  $L_{-(\alpha+\beta)}^p(J)$ ; ce qui implique

$$d_n(S\dot{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \approx d_n(S\dot{W}^{k,p}(J), L_{-(\alpha+\beta)}^p(J)).$$

<sup>1</sup> V. M. Tinomirov (23) a démontré pour  $m = 1$  que  $d_n(S\dot{W}^{k,\infty}(J); L^\infty(J)) \approx n^{-k}$ .

(2)  $\alpha \geq 0$  et  $\beta < 0$ . Si  $\alpha + (1/p) \notin \{1, 2, \dots, k\}$  l'application  $u \mapsto t^{-\beta}u$  est un isomorphisme simultané de  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$  sur  $\dot{W}_{\alpha+\beta}^{k,p}(J)$  et de  $L_{-\beta}^p(J)$  sur  $L^p(J)$ ; ce qui implique

$$d_n(S\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \approx d_n(S\dot{W}_{\alpha+\beta}^{k,p}(J), L^p(J)).$$

Si  $\alpha + (1/p) \in \{1, 2, \dots, k\}$  et  $\alpha + \beta < k/m$  il existe  $\alpha'$  et  $\alpha''$  tels que  $\alpha' < \alpha < \alpha''$ ,  $\alpha'' + \beta < k/m$ ,  $\alpha' + (1/p) \notin \{1, 2, \dots, k\}$  et  $\alpha'' + (1/p) \notin \{1, 2, \dots, k\}$ . Les inclusions

$$\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow \dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow \dot{W}_{\alpha+\beta}^{k,p}(J)$$

nous permettent de conclure.

*2ème partie.* Démonstration du théorème pour  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $p < +\infty$ . Le cas  $p = +\infty$  se traite de la même manière.

(1) *Majoration.* Dans toute la démonstration  $C$  désigne une constante positive qui dépend de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $p$ , qui ne sera pas toujours la même.

(1.a) Soit  $\delta$  un nombre réel tel que  $0 < \delta < 1$ . On approche  $u$  par 0 sur le pavé  $J' \times ]0, \delta[$ .

Si  $\alpha + (1/p) \notin \{1, 2, \dots, k\}$ , d'après le lemme III.1

$$\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow L_{\alpha-k}^p(J) \hookrightarrow L_{-\beta}^p(J).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p} |u(x)|^p dt &= \delta^{1-\beta p} \int_{J'} dx' \int_0^1 s^{-\beta p} |u(x', \delta s)|^p ds \\ &\leq \delta^{1-\beta p} \int_{J'} dx' \int_0^1 s^{(\alpha-k)p} |u(x', \delta s)|^p ds \\ &= \delta^{kp-(\alpha+\beta)p} \int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{(\alpha-k)p} |u(x', t)|^p dt \\ &\leq \delta^{kp-(\alpha+\beta)p} \|u\|_{L_{\alpha-k}^p(J)}^p \\ \int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p} |u(x)|^p dt &\leq C \cdot \delta^{kp-(\alpha+\beta)p} \|u\|_{\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)}^p. \end{aligned} \quad (1)$$

Si  $\alpha + (1/p) \in \{1, 2, \dots, k\}$  il existe  $\alpha' > \alpha$  tel que  $\alpha' + (1/p) \notin \{1, \dots, k\}$  et  $\alpha + \beta < \alpha' + \beta < k$ . Alors  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J) \hookrightarrow \dot{W}_{\alpha'}^{k,p}(J)$  implique

$$\int_J dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p} |u(x)|^p dt \leq C \cdot \delta^{kp-(\alpha'+\beta)p} \|u\|_{\dot{W}_{\alpha'}^{k,p}(J)}^p. \quad (1')$$

Pour  $\epsilon > 0$  donné, (1) ou (1') implique

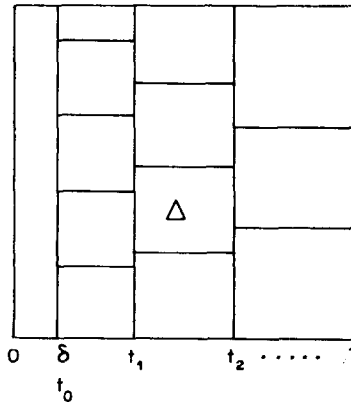
$$\int_{J'} dx' \int_0^\delta t^{-\beta p} |u(x)|^p dt \leq \epsilon^p \cdot \|u\|_{\dot{W}_\alpha^{k,p}(J)}^p \quad (2)$$

en prenant

$$\begin{aligned} C \cdot \delta^{kp-(\alpha+\beta)p} &= \epsilon^p & \text{si } \alpha + (1/p) \notin \{1, \dots, k\}, \\ C \cdot \delta^{kp-(\alpha'+\beta)p} &= \epsilon^p & \text{si } \alpha + (1/p) \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

(1.b) On partage maintenant  $J' \times ]\delta, 1[$  en cubes  $\Delta$ . Sur chaque cube  $\Delta$  on approche la fonction  $u$  par le polynôme  $P_\Delta u$  de degré  $(k-1)$  tel que  $\int_\Delta (D^\mu u(x) - D^\mu P_\Delta u(x)) dx = 0$  pour  $|\mu| < k$ .

On obtient les cubes  $\Delta$  de la manière suivante: On divise  $]\delta, 1[$  par des points  $t_0 = \delta < t_1 < \dots < t_h = 1$ ; si  $l_j = t_j - t_{j-1}$ , pour  $t_{j-1} < t < t_j$  le cube  $\Delta$  a pour côté  $l_j$ .



On détermine  $l_j$  de manière à avoir

$$\int_\Delta |u - P_\Delta u|^p t^{-\beta p} dx' dt \leq \epsilon^p \int_\Delta \sum_{|\mu|=k} |D^\mu u(x)|^p t^{\alpha p} dx' dt.$$

Alors si on appelle  $\mathcal{E}$  la subdivision de  $J$  obtenue et  $P_\mathcal{E}$  l'opérateur qui, à  $u$ , fait correspondre 0 pour  $t < \delta$ ,  $P_\Delta u$  pour  $x \in \Delta$

$$\int_J |u - P_\mathcal{E} u|^p t^{-\beta p} dx' dt \leq \epsilon^p \sum_{|\mu|=k} \|t^\alpha D^\mu u\|_{L^p(J)}^p$$

soit

$$\|u - P_\mathcal{E} u\|_{L^p_\beta(J)} \leq \epsilon \cdot \|u\|_{\dot{W}_\alpha^{k,p}(J)}.$$

Détermination de  $l_j$ .

$$\int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta}u(x)|^p t^{-\beta p} dx \leq t_{j-1}^{-\beta p} \int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta}u(x)|^p dx.$$

On utilise l'inégalité de Poincaré. Comme  $\int_{\Delta} (u(x) - P_{\Delta}u(x)) dx = 0$

$$\int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta}u(x)|^p dx \leq C \cdot (t_j - t_{j-1})^p \int_{\Delta} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} P_{\Delta}u(x) \right|^p dx \quad (x_m = t).$$

On applique à nouveau l'inégalité de Poincaré [21] autant de fois que cela est nécessaire et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta}u(x)|^p t^{-\beta p} dx &\leq C \cdot t_{j-1}^{-\beta p} l_j^{kp} \int_{\Delta} \sum_{|u|=k} |D^u u(x)|^p dx, \\ \int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta}u(x)|^p t^{-\beta p} dx &\leq C \cdot t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)p} l_j^{kp} \int_{\Delta} \sum_{|u|=k} t^{\alpha p} |D^u u(x)|^p dx. \end{aligned} \quad (3)$$

On veut que

$$\max_j C t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)p} l_j^{kp} \leq \epsilon^p \quad \text{soit} \quad l_j \leq C \cdot \epsilon^{1/k} t_{j-1}^{(\alpha+\beta)/k} \quad \forall j.$$

Si  $\alpha + (1/p) \notin \{1, \dots, k\}$  posons à priori  $l_j = a \cdot \epsilon^{\sigma} \cdot j^{\gamma}$  où  $a$  est une constante à choisir  $\sigma = 1/(k - (\alpha + \beta))$  et  $\gamma = (\alpha + \beta)\sigma$ . Alors

$$t_j = \delta + a \cdot \epsilon^{\sigma} \cdot \sum_{r=1}^j r^{\gamma}.$$

Si  $\alpha + (1/p) \in \{1, \dots, k\}$  on remplace  $\sigma$  par  $\sigma' = 1/(k - (\alpha' + \beta))$ . Comme

$$\delta \approx \epsilon^{\sigma} \quad \text{si} \quad \alpha + (1/p) \notin \{1, \dots, k\}$$

$$\sum_{r=1}^j r^{\gamma} \approx j^{\gamma+1} = j^{k\sigma} \text{ et } \delta \approx \epsilon^{1/(k-(\alpha'+\beta))} \text{ si } \alpha + (1/p) \in \{1, \dots, k\} \quad (\alpha' > \alpha),$$

$$t_j \approx \epsilon^{\sigma} \cdot j^{k\sigma},$$

et

$$l_j \cdot t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)/k} \approx \epsilon^{1/k}.$$

Soit  $h$  tel que

$$t_{h-1} < 1 = t_h, \quad t_h \approx 1 \approx \epsilon^{\sigma} h^{k\sigma},$$

soit

$$h^{-k} \approx \epsilon. \quad (4)$$

\* Pour  $m = 1$  on a approché tout élément de la boule unité de  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$  par un sous-espace vectoriel de dimension  $n = kh$  et il existe une constante  $B$  positive telle que

$$d_n(S\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B \cdot n^{-k}.$$

\*\* Pour  $m > 1$ , évaluons le nombre  $n'$  de cubes  $\Delta$  de la subdivision  $\mathcal{E}$

$$\sum_{j=1}^h (I_j^{-1})^{m-1} \leq n' \leq \sum_{j=1}^h (I_j^{-1} + 1)^{m-1} \leq \sum_{j=1}^h (2I_j^{-1})^{m-1}$$

$$n' \approx \epsilon^{-(m-1)/(k-(\alpha+\beta))} \sum_{j=1}^h j^{-((m-1)(\alpha+\beta))/(k-(\alpha+\beta))}$$

si  $\alpha + \beta < k/m$ ,

$$\sum_{j=1}^h j^{-((m-1)(\alpha+\beta))/(k-(\alpha+\beta))} \approx h^{-((m-1)(\alpha+\beta))/(k-(\alpha+\beta))+1} = h^{(k-m(\alpha+\beta))/(k-(\alpha+\beta))}$$

soit

$$n' \approx \epsilon^{-(m-1)/(k-(\alpha+\beta)) - (k-m(\alpha+\beta))/k[k-(\alpha+\beta)]} = \epsilon^{-m/k}.$$

On a approché tout élément de la boule unité de  $\dot{W}_\alpha^{k,p}(J)$  par un sous-espace vectoriel de dimension  $n = cn'$  où  $c$  est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes à  $m$  variables de degré  $\leq k-1$ .

et

$$d_n(S\dot{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B \cdot n^{-k/m}$$

si  $\alpha + \beta > k/m$ ,

$$\sum_{j=1}^h j^{-((m-1)(\alpha+\beta))/(k-(\alpha+\beta))} \approx 1$$

soit

$$n' \approx \epsilon^{-(m-1)/(k-(\alpha+\beta))}$$

et

$$d_n(S\dot{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B \cdot n^{-(k-(\alpha+\beta))/(m-1)}$$

si  $\alpha + \beta = k/m$ ,

$$\sum_{j=1}^h j^{-((m-1)(\alpha+\beta))/(k-(\alpha+\beta))} = \sum_{j=1}^h j^{-1} \sim \log h$$

$$n' \approx \epsilon^{-(m-1)/(k-(\alpha+\beta))} \log h = \epsilon^{-m/k} \log h \approx \epsilon^{-m/k} \log \epsilon^{-1/k}$$

$$\log n' \approx -m/k \log \epsilon + \log \log \epsilon^{-1/k}$$

$$\frac{\log n'}{n'} \approx \epsilon^{m/k} + \frac{\log \log \epsilon^{-1/k}}{\log \epsilon^{-1/k}}$$

$$\frac{\log n'}{n'} \approx \epsilon^{m/k}; \quad \left( \frac{\log n'}{n'} \right)^{k/m} \approx \epsilon$$

et

$$d_n(S\dot{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq B \cdot \left( \frac{\log n}{n} \right)^{k/m}.$$



*Remarque.* Dans certains cas, par exemple  $\alpha = 0$ ,  $\beta < 1/p$  et  $m < kp$  ou bien  $\alpha = 0$  et  $m \geq kp$  on retrouve des cas particuliers de résultats de Birman et Solomjak [3].

## 2. Minoration

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ . On partage  $]0, 1[$  en  $s$  sous-intervalles et on obtient une partition de  $J$  en  $s^m$  cubes  $J_l$  de côté  $1/s$ . On définit  $\varphi_l$  par  $\varphi_l(x) = \varphi(sx - l)$ ,  $l = (l_1, \dots, l_m)$ ,  $0 \leq l_i \leq s - 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Alors  $\varphi_l \in \mathcal{D}(J_l)$ .

\* Pour  $0 \leq \alpha + \beta < k/m$ . Soit  $E_{n+1}$  le sous-espace de  $L_{-\beta}^p(J)$  engendré par les fonctions  $\varphi_l$ . Si  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $E_{n+1} = \{f_\gamma = \sum_l \gamma_l \varphi_l\}$ ;  $\dim E_{n+1} = n + 1 = s^m$

$$\begin{aligned} \|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}^p &= \int_J \left| \sum_l \gamma_l \varphi_l(x) \right|^p t^{-\beta p} dx \geq \int_J \left| \sum_l \gamma_l \cdot \varphi_l(x) \right|^p dx \\ &= \sum_l |\gamma_l|^p \int_{J_l} |\varphi_l(x)|^p dx = s^{-m} \sum_l |\gamma_l|^p \cdot \|\varphi\|_{L^p(J)}^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_\gamma\|_{\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)}^p &= \sum_{|\mu| \leq k} \|t^\alpha D^\mu f_\gamma\|_{L^p(J)}^p = \sum_{|\mu| \leq k} \int_J t^{\alpha p} \left| \sum_l \gamma_l D^\mu \varphi_l(x) \right|^p dx \\ &\leq \sum_{|\mu| \leq k} \int_J \left| \sum_l \gamma_l D^\mu \varphi_l(x) \right|^p dx = \sum_{|\mu| \leq k} \sum_l |\gamma_l|^p \int_{J_l} |D^\mu \varphi_l(x)|^p dx \\ &= \sum_{|\mu| \leq k} \sum_l |\gamma_l|^p \int_{J_l} s^{|\mu|p} |(D^\mu \varphi)_l(x)|^p dx \\ &= s^{-m} \sum_l |\gamma_l|^p \sum_{|\mu| \leq k} s^{|\mu| \cdot p} \int_J |D^\mu \varphi(x)|^p dx \\ &\leq C \cdot s^{-m} \sum_{|\mu| \leq k} s^{|\mu| \cdot p} \sum_l |\gamma_l|^p \leq C \cdot s^{-m} \sum_{r=0}^k s^{rp} \sum_l |\gamma_l|^p \\ &\quad \sum_{r=0}^k s^{rp} \sim s^{kp} \\ \|f_\gamma\|_{\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)}^p &\leq C \cdot s^{kp-m} \sum_l |\gamma_l|^p \end{aligned}$$

et

$$\|f_\gamma\|_{\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)} \leq C \cdot s^k \cdot \|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}.$$

La boule  $B_r$  de rayon  $r = C^{-1}s^{-k}$  de  $E_{n+1}$  est donc contenue dans la boule unité de  $\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J)$ . En utilisant le théorème de Krein et les propriétés de la  $n$ ème épaisseur, on obtient:

$$d_n(S\dot{W}_{\alpha}^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \geq d_n(B_r, L_{-\beta}^p(J)) = C^{-1}s^{-k}.$$

Comme  $(n + 1) = s^m$ ,  $n \sim s^m$ . Il existe donc une constante positive  $A$  telle que

$$d_n(S\hat{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \geq A \cdot n^{-k/m}.$$

\*\* Pour  $k/m < \alpha + \beta < k$ . Soit  $E_{n+1}$  le sous-espace de  $L_{-\beta}^p(J)$  engendré par les fonctions  $\varphi_l$  telles que  $l_m = 0$

$$E_{n+1} = \left\{ f_\gamma = \sum_{l_m=0} \gamma_l \varphi_l \right\} \quad \dim E_{n+1} = n + 1 = s^{(m-1)}$$

$$\|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}^p = \int_J \left| \sum_{l_m=0} \gamma_l \cdot \varphi_l(x) \right|^p t^{-\beta p} dx \geq s^{\beta p} \int_J \left| \sum_{l_m=0} \gamma_l \cdot \varphi_l(x) \right|^p dx$$

$$\|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}^p \geq s^{\beta p} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_l} |\varphi_l(x)|^p dx = s^{\beta p - m} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \cdot \|\varphi\|_{L^p(J)}^p$$

$$\begin{aligned} \|f_\gamma\|_{\hat{W}_\alpha^{k,p}(J)}^p &= \sum_{|\mu| \leq k} \int_J \left| \sum_{l_m=0} \gamma_l \cdot D^\mu \varphi_l(x) \right|^p t^{\alpha p} dx \\ &= \sum_{|\mu| \leq k} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_l} t^{\alpha p} |D^\mu \varphi_l(x)|^p dx \\ &\leq s^{-\alpha p} \sum_{|\mu| \leq k} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_l} |D^\mu \varphi_l(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Un calcul identique au précédent (cas  $\alpha + \beta < k/m$ ) donne

$$\|f_\gamma\|_{\hat{W}_\alpha^{k,p}(J)}^p \leq C \cdot s^{k p - \alpha p - m} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p$$

et

$$\|f_\gamma\|_{\hat{W}_\alpha^{k,p}(J)} \leq C \cdot s^{k - (\alpha + \beta)} \cdot \|f_\gamma\|_{L_{-\beta}^p(J)}.$$

En utilisant le théorème de Krein

$$d_n(S\hat{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \geq A \cdot n^{-(k - (\alpha + \beta)) / (m-1)}$$

3ème partie. Démonstration du théorème pour  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ .

La majoration est une conséquence de

$$\hat{W}_\alpha^{k,p}(J) \hookrightarrow \hat{W}^{k,p}(J) \hookrightarrow L^p(J) \hookrightarrow L_{-\beta}^p(J)$$

$$d_n(S\hat{W}_\alpha^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq d_n(S\hat{W}^{k,p}(J), L_{-\beta}^p(J)) \leq d_n(S\hat{W}^{k,p}(J), L^p(J)).$$

Minoration. Soient  $a = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ ,  $Q = \frac{1}{2}J + a$ .

On reprend la démonstration faite dans le cas  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta < k/m$  en substituant le cube  $Q$  au cube  $J$ .

4ème partie. Démonstration du théorème pour  $\alpha + \beta > k/m$ ,  $\beta < 0$ ,  $p < -\infty$  et  $\alpha + (1/p) \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

(1) Pour la majoration, l'inégalité (3) est remplacée par

$$\int_{\Delta} |u(x) - P_{\Delta} u(x)|^p t^{-\beta p} dx \leq C \cdot l_j^{-\beta p} t_{j-1}^{-\alpha p} l_j^{kp} \int_{\Delta} \sum_{|\mu|=k} t^{\alpha p} |D^{\mu} u(x)|^p dx.$$

On a alors

$$l_j \cdot t_j^{-\beta/k} t_{j-1}^{-\alpha/k} \approx \epsilon^{1/k} \quad \text{avec} \quad l_j = a \epsilon^{1/(k-(\alpha+\beta))} j^{(\alpha+\beta)/(k-(\alpha+\beta))}.$$

La fin de la démonstration est sans changement.

(2) Pour la minoration, on prend pour  $E_{n+1}$  le sous-espace de  $L^p_{-\beta}(J)$  engendré par les fonctions  $\varphi_l$  telles que  $l_m = 1$ .

De  $1/s < t < 2/s$  on déduit

$$\begin{aligned} \|f_{\gamma}\|_{L^p_{-\beta}(J)}^p &\geq s^{\beta p - m} \sum_{l_m=1} |\gamma_l|^p \cdot \|\varphi\|_{L^p(J)}^p, \\ \|f_{\gamma}\|_{W^{k,p}_{\alpha}(J)}^p &\leq C \cdot s^{k p - \alpha p - m} \sum_{l_m=1} |\gamma_l|^p. \end{aligned}$$

On termine en utilisant le théorème de Krein. Le cas  $p = +\infty$  se traite de la même manière.

## 2. Généralisation

Soient  $\bar{\Omega}$  une variété à bord  $C^{\infty}$ , compacte, de dimension  $m$  et  $\varphi$  une fonction de classe  $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ , positive dans  $\Omega$ , nulle à l'ordre 1 au bord.

On appelle espace de Sobolev  $W^{k,p}_{\alpha}(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\varphi^{\alpha} \cdot D^{\mu} u \in L^p(\Omega)$  pour  $|\mu| \leq k$ . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}_{\alpha}(\Omega)}^p = \sum_{|\mu| \leq k} \|\varphi^{\alpha} \cdot D^{\mu} u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

$\dot{W}^{k,p}_{\alpha}(\Omega)$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{k,p}_{\alpha}(\Omega)$  et  $L^p_{-\beta}(\Omega)$  est l'espace des (classes de) fonctions  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\varphi^{-\beta} u \in L^p(\Omega)$ .

Le théorème III.1 est encore valable si on substitue  $\Omega$  à  $J$ . La démonstration se fait par cartes locales et partition de l'unité.

## 3. Comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique dégénéré

Nous généralisons ici un résultat de Boutet De Monvel et Grisvard [5].

(a) Soit  $A$  un opérateur non borné, auto-adjoint, de domaine  $D_A$  dans un espace de Hilbert  $H$ . Sur  $D_A$  on prend la norme du graphe; si l'identité  $D_A \xrightarrow{i} H$  est compacte, alors le spectre  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  de  $A$  est discret et réel, chacune des valeurs propres ayant un ordre de multiplicité fini. De plus, il existe une base orthonormale  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$  de  $H$  telle que

$$\varphi_n \in D_A \quad \text{et} \quad A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \quad \forall n.$$

Nous utiliserons le résultat connu suivant.

LEMME III.3.a. *Soit  $A$  un opérateur non borné, auto-adjoint, de domaine  $D_A$  dans un espace de Hilbert  $H$  tel que l'injection  $D_A \rightarrow H$  soit compacte, alors*

$$d_n(SD_A, H) = \{|\lambda_{n+1}|^2 + 1\}^{-1/2}$$

étant entendu que les  $\lambda_n$  sont rangées par ordre de module croissant.

*Majoration.* Considérons le sous-espace  $E_n$  de dimension  $n$  engendré par  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Pour tout élément  $u \in SD_A$

$$\begin{aligned} d(u, E_n)^2 &= \sum_{i > n} |(u; \varphi_i)|^2 \leq 1/(1 + |\lambda_{n+1}|^2) \|u\|_{D_A}^2, \\ \sup_{u \in SD_A} d(u, E_n) &\leq (1 + |\lambda_{n+1}|^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

*Minoration.* Pour tout élément  $u$  du sous-espace  $E_{n+1}$  de dimension  $n+1$  engendré par  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$  on a

$$\|u\|_{E_{n+1}}^2 = \sum_{i \leq n+1} |(u; \varphi_i)|^2 \geq (1 + |\lambda_{n+1}|^2)^{-1} \sum_{i \leq n+1} (1 + |\lambda_i|^2) |(u; \varphi_i)|^2.$$

Soit

$$\|u\|_{D_A} \leq (1 + |\lambda_{n+1}|^2)^{+1/2} \cdot \|u\|_{E_{n+1}}$$

et

$$(1 + |\lambda_{n+1}|^2)^{-1/2} \cdot SE_{n+1} \subset SD_A.$$

D'après le théorème de Krein et les propriétés de la  $n$ ème épaisseur

$$d_n(SD_A, E) \geq (1 + |\lambda_{n+1}|^2)^{-1/2}.$$

(b) Soit  $\bar{\Omega}$  une variété à bord  $C^\infty$ , compacte, de dimension  $m$  et  $\varphi$  une fonction de classe  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , positive dans  $\Omega$ , nulle à l'ordre 1 au bord.

$\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}$  étant une matrice de fonctions  $C^\infty(\bar{\Omega})$  telles que

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \zeta_i \bar{\zeta}_j \geq C \cdot \sum_{i=1}^m |\zeta_i|^2$$

pour  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{C}^m$  et  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$  on considère l'opérateur différentiel  $A$  défini par

$$Au(x) = - \sum_{i,j=1}^m \partial/\partial x_j \{a_{ij}(x) \cdot \varphi(x)^{2\alpha} \cdot \partial u/\partial x_i\}.$$

*Problème variationnel lié à  $A$ .* On pose  $H = L^2(\Omega)$  et  $V$  est le complété de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la norme

$$u \rightarrow \left( \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \varphi(x)^{2\alpha} |\partial u/\partial x_i|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Pour  $|\alpha| < \frac{1}{2}$   $V$  est l'espace  $\dot{W}_{\alpha}^{1,2}(\Omega)$ . Pour  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$   $V$  est l'espace  $W_{\alpha}^{1,2}(\Omega) = \dot{W}_{\alpha}^{1,2}(\Omega)$ . Pour  $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$   $A$  est donc un isomorphisme de  $V$  sur  $V'$  et l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte. (C'est une conséquence du théorème III.1 et de la 5ième propriété des  $n$ ème épaisseurs.)

$V$  est le domaine de  $A^{1/2}$  et on a le corollaire suivant du théorème III.1 et du lemme III.2.a.

**COROLLAIRE III.2.6.** *Sous les hypothèses précédentes pour l'opérateur  $A$  on a*

$$\lambda_n \begin{cases} \approx n^{2/m} & \text{si } -1/2 < \alpha < 1/m, \\ \geq C(\log n/n)^{-2/m} & \text{si } \alpha = 1/m, \\ \approx n^{(2(1-\alpha))/(m-1)} & \text{si } 1/m < \alpha < 1. \end{cases}$$

*Remarque.* (1) Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  on retrouve des résultats dus à Baouendi et Goulaouic [2]. Notons cependant que l'on n'a pas ici de renseignements sur les constantes introduites par le symbole  $\approx$ .

(2) La liaison entre  $n$ ème-épaisseur dans un espace de Hilbert et valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint positif a été faite par Kolmogorov [7]. Pour plus de détails on peut consulter l'ouvrage de Lorentz [11, Theorem 9, p. 146].

D'autres auteurs l'ont suivi dans cette voie, par exemple Jerome [20].

(3) Signalons enfin les travaux récents de Nordin [29] et de Cherif [18] sur le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique dégénéré.

#### IV. $n$ ÈME ÉPAISSEUR DANS LES ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRE NON ENTIER

1. DÉFINITIONS. Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $s$  un nombre réel positif; posons  $s = k + \sigma$  où  $k \in \mathbb{N}^2$  et  $0 < \sigma < 1$ . On appelle espace de Sobolev  $W^{s,p}(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

<sup>2</sup>  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels.

(1)  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , i.e.,  $D^\mu u \in L^p(\Omega)$  pour  $|\mu| \leq k$ .

(2) 
$$\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\mu u(x) - D^\mu u(y)|^p}{|x - y|^{m+\sigma p}} dx dy < +\infty \quad \text{pour } |\mu| = k.$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p + \iint_{\Omega \times \Omega} \sum_{|\mu|=k} \frac{|D^\mu u(x) - D^\mu u(y)|^p}{|x - y|^{m+\sigma p}} dx dy \quad (9)$$

soit  $\mathbb{T}^m$  le tore à  $n$  dimensions. On désigne par  $W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ , périodiques, de période  $2\pi$  par rapport à chacune des variables telles que  $u|_\Omega \in W^{s,p}(\Omega)$  pour tout ouvert borné  $\Omega$ . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{T}^m)} = \|u_J\|_{W^{s,p}(J)}.$$

Pour  $(-s)$  nombre réel négatif  $W^{-s,p}(\Omega)$  (resp.  $W^{-s,p}(\mathbb{T}^m)$ ) est le dual de l'adhérence  $\tilde{W}^{s,p}(\Omega)$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$  (resp. de  $W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$ ).

Nous utiliserons la notion d'espace de classe  $\mathcal{X}^\theta$  introduite par Lions et Peetre [10].

Soient  $A_0 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_1$  trois espaces de Banach:

(1) On dit que  $A$  est de classe  $\mathcal{X}_\theta$  entre  $A_0$  et  $A_1$  s'il existe une constante positive  $c$  telle que l'on ait

$$\|a\|_A \leq c \cdot \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \cdot \|a\|_{A_1}^\theta \quad \text{pour tout } a \in A_0.$$

(2) On dit que  $A$  est de classe  $\mathcal{X}^\theta$  entre  $A_0$  et  $A_1$  s'il existe une constante positive  $c$  telle que pour tout  $t > 0$  et tout  $a \in A$  il existe  $a_i(t) \in A_i$  ( $i = 0, 1$ ) tels que

$$a = a_0(t) + a_1(t) \quad \text{et} \quad \|a_0(t)\|_{A_0} \leq c \cdot t^{-\theta} \|a\|_A;$$

$$\|a_1(t)\|_{A_1} \leq c \cdot t^{1-\theta} \|a\|_A.$$

(3) On dit que  $A$  est de classe  $\mathcal{X}^\theta$  entre  $A_0$  et  $A_1$  s'il est à la fois de classe  $\mathcal{X}^\theta$  et  $\mathcal{X}_\theta$  entre  $A_0$  et  $A_1$ .

$W^{\theta t + (1-\theta)s,p}(J)$  est de classe  $\mathcal{X}^\theta$  entre  $W^{s,p}(J)$  et  $W^{t,p}(J)$  si  $s$  et  $t$  sont de même signe [16, 17, 10].

Dans ce chapitre, nous démontrerons le théorème.

**THÉORÈME IV.1.** Soient  $J = ]0, 1[^m$  un pavé ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $s \geq t$  deux nombres réels et  $1 < p < +\infty$ ; alors

$$d_n(SW^{s,p}(J), W^{t,p}(J)) \approx n^{-(s-t)/m}.$$

## 2. Isomorphisme entre espaces de Sobolev

LEMME IV.2. Soient  $\mathbb{T}^m$  le tore à  $m$  dimensions,  $s$  et  $t$  deux nombres réels de signe quelconque tels que  $s - t \in \mathbb{Z}$ ,<sup>3</sup>  $p$  un nombre réel tel que  $1 < p < +\infty$ . Il existe un isomorphisme  $I_{s-t}$  de  $W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{t,p}(\mathbb{T}^m)$  qui ne dépend que de la différence  $s - t$ .

a. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , construction d'un isomorphisme de  $W^{k+1,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{k,p}(\mathbb{T}^m)$ . Pour cela, nous allons travailler sur le pavé  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^m$  de côté  $2\pi$  centré à l'origine et utiliser le théorème.

THÉORÈME DE MARCINKIEWICZ [12, 13, 24]. Étant donnés  $1 < p < +\infty$ , le pavé  $\Pi$  de côté  $2\pi$  centré à l'origine, pour que l'opérateur  $U$  défini par

$$(Ug)(x) = \sum_{n_1, \dots, n_m = -\infty}^{+\infty} \lambda(n_1, \dots, n_m) \cdot a_{n_1 \dots n_m} \exp i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)$$

où

$$g(x) = \sum_{n_1, \dots, n_m = -\infty}^{+\infty} a_{n_1 \dots n_m} \exp i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)$$

soit un opérateur continu de  $L^p(\Pi)$  dans  $L^p(\Pi)$  il suffit que, pour tout multi-indice  $\alpha$  on ait

$$\begin{aligned} & |\lambda(\pm 2^{\alpha_1+1} \mp 1, \dots, \pm 2^{\alpha_m+1} \mp 1)| \leq M \\ & \sum_{|n_1|=2^{\alpha_1}}^{2^{\alpha_1+1}-2} |\lambda(n_1, \pm 2^{\alpha_2+1}, \dots, \pm 2^{\alpha_m+1}) - \lambda(n_1 + 1, \pm 2^{\alpha_2+1}, \dots, \pm 2^{\alpha_m+1})| \leq M \\ & \sum_{|n_m|=2^{\alpha_m}}^{2^{\alpha_m+1}-2} |\lambda(\pm 2^{\alpha_1+1}, \dots, \pm 2^{\alpha_{m-1}+1}, n_m) - \lambda(\pm 2^{\alpha_1+1}, \dots, \pm 2^{\alpha_{m-1}+1}, n_m + 1)| \leq M \\ & \dots \\ & \sum_{\substack{|n_i|=2^{\alpha_i} \\ 1 \leq i \leq m}}^{2^{\alpha_i+1}-2} |\lambda(n_1, \dots, n_m) - \lambda(n_1 + 1, n_2, \dots, n_m) - \\ & \dots - \lambda(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n_m + 1) + \lambda(n_1 + 1, n_2 + 1, \dots, n_m) + \dots \\ & + (-1)^m \lambda(n_1 + 1, n_2 + 1, \dots, n_m + 1)| \leq M. \end{aligned}$$

De plus, il existe une constante  $A_{p,m}$  ne dépendant que de  $p$  et  $m$  telle que

$$\|U\| \leq A_{p,m} \cdot M.$$

<sup>3</sup>  $\mathbb{Z}$  désigne l'anneau des entiers relatifs.

On trouve la démonstration de ce théorème dans le livre de Mihlin [13]. Une condition suffisante, qui implique la précédente, est que  $\lambda$  soit la restriction à  $\mathbb{Z}^m$  d'une fonction  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}^m$  telle que

$$|x|^k |D^\alpha \Phi| \leq M' \quad \text{pour } 0 \leq |\alpha| = k \leq m \quad (1)$$

où  $|x|$  désigne la norme euclidienne de  $x$ .

Les conditions (1) étant vérifiées par les fonctions:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= (1 + x_1^2 + \dots + x_m^2)^{-1/2}, \\ \Phi_k(x) &= x_k \cdot (1 + x_1^2 + \dots + x_m^2)^{-1/2} \quad (k = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

On construit l'isomorphisme

$$A: W^{1,p}(\mathbb{T}^m) \rightarrow L^p(\mathbb{T}^m)$$

en posant

$$\begin{aligned} Au &= f, \\ u &= \sum_{n_1, \dots, n_m = -\infty}^{+\infty} c_{n_1 \dots n_m} \cdot \exp i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m), \\ f &= \sum_{n_1, \dots, n_m = -\infty}^{+\infty} d_{n_1 \dots n_m} \cdot \exp i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m), \\ d_{n_1 \dots n_m} &= c_{n_1 \dots n_m} \cdot (1 + n_1^2 + \dots + n_m^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme

$$(\partial/\partial x_k) Au = A \cdot \partial u / \partial x_k \quad (k = 1, \dots, m).$$

$A$  est un isomorphisme de  $W^{k,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{k-1,p}(\mathbb{T}^m)$  et  $A^k$  un isomorphisme de  $W^{k,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $L^p(\mathbb{T}^m)$ .

b. Pour  $k \in \mathbb{N}$  construction d'un isomorphisme de  $W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)$ .  $A$  construit précédemment opère continûment de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{D}$ . On a donc

$$t_A: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'.$$

Avec

$$(Au, v) = (u, {}^t A v).$$

Pour  $u$  et  $v$  appartenant à  $H^1(\mathbb{T}^m)$

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \sum_{n_1, \dots, n_m = -\infty}^{+\infty} (1 + n_1^2 + \dots + n_m^2)^{1/2} u_{n_1 \dots n_m} \cdot \bar{v}_{n_1 \dots n_m} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_m = -\infty}^{+\infty} u_{n_1 \dots n_m} \cdot [(1 + n_1^2 + \dots + n_m^2)^{1/2} \bar{v}_{n_1 \dots n_m}] \\ &= (u, Av). \end{aligned}$$



Comme  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^m) \subset H^1(\mathbb{T}^m)$

$${}^tA|_{\mathcal{D}(\mathbb{T}^m)} = A.$$

$A$  se prolonge donc continûment de  $\mathcal{D}'$  dans  $\mathcal{D}'$  et son prolongement est  ${}^tA$ .

D'autre part, comme  $A$  opère continûment de  $W^{k+1,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{k,p}(\mathbb{T}^m)$ ,  ${}^tA|_{W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)}$  qui opère de  $W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)$  dans  $W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)$  et est le prolongement de  $A$  est continu.

De la même façon, on voit que  ${}^t(A^{-1})|_{W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)}$  opère continûment de  $W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)$  dans  $W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)$  et on a

$${}^tA|_{W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)} \circ {}^t(A^{-1})|_{W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)} = id_{W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)},$$

$${}^t(A^{-1})|_{W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)} \circ {}^tA|_{W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)} = id_{W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)}.$$

${}^tA|_{W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)}$  est donc un isomorphisme de  $W^{-k,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{-k-1,p}(\mathbb{T}^m)$ .

En composant les isomorphismes ainsi construits, on obtient un isomorphisme de  $W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$  sur  $W^{t,p}(\mathbb{T}^m)$  pourvu que  $s$  et  $t$  soient entiers.

En utilisant les propriétés d'interpolation, ces résultats sont étendus au cas où  $s$  et  $t$  ne sont pas entiers pourvu que la différence  $s - t \in \mathbb{Z}$ .

### 3. $n$ -ième épaisseur selon Gelfand [15].

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ , on appelle, selon Gelfand,  $n$ ième épaisseur de  $A$  dans  $E$  le nombre

$$d^n(A, E) = \inf_{L^n \in \mathcal{L}^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\|_E$$

où  $\mathcal{L}^n$  désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de co-dimension  $n$  de  $E$ .

Il est immédiat que la suite  $d^n(A, E)$  est décroissante.

LEMME IV.3.1. Soient  $X \hookrightarrow Y$  deux espaces de Banach réflexifs tels que  $X$  soit dense dans  $Y$ ; alors  $X'$  (resp.  $Y'$ ) étant le dual de  $X$  (resp.  $Y$ ) on a:

$$d_n(SX, Y) = d^n(SY', X'),$$

$$d^n(SX, Y) = d_n(SY', X').$$

*Démonstration.* 1ère partie.  $d^n(SY', X') \leq d_n(SX, Y)$  soit  $\delta_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $d_n(SX, Y) < \delta_n$ .

Il existe un sous-espace  $L_n$  de dimension  $n$  de  $Y$  tel que

$$\sup_{x \in SX} d_Y(x, L_n) < \delta_n.$$

Démontrons qu'on peut se ramener au cas où  $L_n \subset X$ .

Si  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  est une base de  $L_n$ , on considère  $n$  vecteurs  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $X$  tels que  $\|\xi_i - \eta_i\|_Y < \epsilon$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  et  $A_n$  le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

$$\dim A_n = m \leq n \quad \text{et} \quad A_n \subset X$$

soit  $\theta$  un nombre réel positif tel que pour tout  $x \in SX$  il existe  $y_x \in L_n$  et  $\|x - y_x\|_Y \leq \delta_n - \theta$ .  $y_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(y_x) \cdot \eta_i$ . Considérons

$$z_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(y_x) \cdot \xi_i \in A_n$$

$$\begin{aligned} \|x - z_x\|_Y &\leq \|x - y_x\|_Y + \|y_x - z_x\|_Y \\ &\leq (\delta_n - \theta) + \sum_{i=1}^n |\lambda_i(y_x)| \cdot \|\xi_i - \eta_i\|_Y. \end{aligned}$$

Sur  $L_n$ ,  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i(y_x)|$  est une norme équivalente à  $\|y_x\|_Y$ . Il existe donc une constante positive  $c$  telle que

$$\begin{aligned} \|x - z_x\|_Y &\leq (\delta_n - \theta) + c \cdot \epsilon \cdot \|y_x\|_Y, \\ \|y_x\|_Y &\leq (\delta_n - \theta) + \|x\|_Y \leq (\delta_n - \theta) + K \cdot \|x\|_X \leq (\delta_n - \theta) + K, \\ \|x - z_x\|_Y &\leq (\delta_n - \theta) + c \cdot \epsilon \cdot (\delta_n - \theta + K) \\ &\leq \delta_n \text{ pour } \epsilon \text{ convenablement choisi} \\ d_Y(x, A_n) &\leq \delta_n \quad \forall x \in SX. \end{aligned}$$

Considérons l'orthogonal  $A^n$  de  $A_n$  dans  $X'$ ; il est de codimension  $m \leq n$  dans  $X'$ .

Pour  $y' \in SY' \cap A^n$

$$\|y'\|_{X'} = \sup_{x \in SX} |\langle x, y' \rangle_{X, X'}| = \sup_{x \in SX} |\langle x - z_x, y' \rangle_{X, X'}|$$

$$|\langle x - z_x, y' \rangle_{X, X'}| = |\langle x - z_x, y' \rangle_{Y, Y'}| \leq \|x - z_x\|_Y \cdot \|y'\|_{Y'} \leq \delta_n \text{ et } d^n(SY', X') \leq d^n(SY', X') \leq \delta_n.$$

2ème partie.  $d_n(SY', X') \leq d^n(SX, Y)$  soit  $\delta_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $d^n(SX, Y) < \delta_n$ . Il existe un sous-espace  $L^n$  de co-dimension  $n$  de  $Y$  tel que  $\|x\|_Y \leq \delta_n \forall x \in SX \cap L^n$ . Soient  $L_n$  l'orthogonal de  $L^n$  dans  $Y'$  et  $M_{n'}$  l'orthogonal de  $L^n \cap X$  dans  $X'$ .  $L_n$  est de dimension  $n$  dans  $Y'$ . Montrons que  $L_n = M_{n'}$ .  $M_{n'}$  est de dimension  $n' \leq n$  dans  $X'$ . En effet, soit  $E_{n'}$  un supplémentaire de  $L^n \cap X$  dans  $X$ ; alors  $E_{n'} \cap L^n = \{0\}$ .

D'autre part, tout élément  $y'$  de  $Y'$  est un élément de  $X'$ . Si  $y'$  s'annule sur  $L^n$ , elle s'annule à fortiori sur  $L^n \cap X$ , donc

$$\dim M_{n'} \leq \dim L_n \quad \left. \begin{array}{l} L_n \subset M_{n'} \\ \dim M_{n'} \leq \dim L_n \end{array} \right\} \Rightarrow L_n = M_{n'}.$$

Il suffit maintenant de démontrer que, pour toute  $y' \in SY'$ , il existe  $z'_{y'} \in L_n$  telle que  $\|y' - z'_{y'}\|_{X'} \leq \delta_n$  ce qui implique  $d_{X'}(y', L_n) \leq \delta_n$ .

Evaluons

$$\|y'\|_{L^n \cap X} \|_{X'} = \sup_{x \in SX \cap L^n} |\langle x, y' \rangle_{X, X'}|$$

$|\langle x, y' \rangle_{X, X'}| = |\langle x, y' \rangle_{Y, Y'}| \leq \|x\|_Y \cdot \|y'\|_{Y'} \leq \delta_n$  pour tout  $x \in SX \cap L^n$   
et

$$\|y'\|_{L^n \cap X} \|_{X'} \leq \delta_n.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe  $w'_{y'} \in X'$  telle que

$$w'_{y'}|_{L^n \cap X} = y'|_{L^n \cap X} \quad \text{et} \quad \|w'_{y'}\|_{X'} \leq \delta_n.$$

Alors

$$z'_{y'} = y' - w'_{y'} \in L_n$$

et

$$\|y' - z'_{y'}\|_{X'} = \|w'_{y'}\|_{X'} \leq \delta_n.$$

*Remarque.* Il résulte de la démonstration ci-dessus que, dans la définition de  $d^n$ , on a le droit de se limiter aux sous-espaces vectoriels *fermés* de codimension  $n$ .

LEMME IV.3.2. Soient  $A_0 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_1$  trois espaces de Banach tels que  $A$  soit de classe  $K_\theta$  entre  $A_0$  et  $A_1$ . Il existe alors une constante positive  $c$  telle que

$$d^n(SA_0, A) \leq c[d^n(SA, A_1)]^{\theta/(1-\theta)}$$

et

$$d^n(SA_0, A) \leq c[d^n(SA_0, A_1)]^\theta.$$

*1ère inégalité.* Soit  $\delta_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $d^n(SA, A_1) < \delta_n$ .

Il existe un sous-espace  $L^n$  de codimension  $n$  de  $A_1$  tel que

$$\sup_{x \in SA \cap L^n} \|x\|_{A_1} < \delta_n$$

soit  $L^m = A \cap L^n \cdot L^m$  est de codimension  $m \leq n$  dans  $A$ . Pour tout  $y \in SA_0 \cap L^m$  on a

$$\|y\|_A \leq c_1 \cdot \|y\|_{A_0}^{1-\theta} \cdot \|y\|_{A_1}^\theta \leq c_1 \cdot \|y\|_{A_1}^\theta$$

donc

$$z = c_1^{-1} \|y\|_{A_1}^{-\theta} \cdot y \in SA \cap L^m$$

et

$$\begin{aligned} \|z\|_{A_1} &= c_1^{-1} \|y\|_{A_1}^{1-\theta} < \delta_n \\ \|y\|_A &\leq c_1 \cdot \|y\|_{A_1}^\theta < c_1^{(2-\theta)/(1-\theta)} \delta_n^{\theta/(1-\theta)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d^n(SA_0, A) &\leq d^m(SA_0, A) < c \cdot \delta_n^{\theta/(1-\theta)}, \\ d^n(SA_0, A) &\leq c \cdot [d^n(SA, A_1)]^{\theta/(1-\theta)}. \end{aligned}$$

*2ème inégalité.* Soit  $\delta_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $d^n(SA_0, A_1) < \delta_n$ .  
Il existe un sous-espace  $L^n$  de codimension  $n$  de  $A_1$  tel que

$$\sup_{x \in SA_0 \cap L^n} \|x\|_{A_1} < \delta_n,$$

$L^m = L^n \cap A$  est de codimension  $m \leq n$  dans  $A$ .

Pour  $x \in SA_0 \cap L^m \subset SA_0 \cap L^n$

$$\begin{aligned} \|x\|_A &\leq c \cdot \|x\|_{A_0}^{1-\theta} \cdot \|x\|_{A_1}^\theta \\ &\leq c \cdot \delta_n^\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d^n(SA_0, A) &\leq d^m(SA_0, A) \leq c \cdot \delta_n^\theta \\ d^n(SA_0, A) &\leq c \cdot [d^n(SA_0, A_1)]^\theta. \end{aligned}$$

LEMME IV.3.3. Soient  $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$  trois espaces de Banach réflexifs tels que:

- (1)  $B_0$  (resp.  $B$ ) soit dense dans  $B$  (resp.  $B_1$ ).
- (2)  $B$  soit de classe  $\mathcal{K}^\theta$  entre  $B_0$  et  $B_1$ .

Alors il existe une constante positive  $c$  telle que

$$d_n(SB, B_1) \leq c [d_n(SB_0, B)]^{(1-\theta)/\theta} \quad (1)$$

et

$$d_n(SB, B_1) \leq c [d_n(SB_0, B_1)]^{1-\theta}. \quad (2)$$

C'est une conséquence des lemmes IV.3.1 et IV.3.2 par passage au dual en tenant compte du fait que, si  $A_1$  (resp.  $A$ ) (resp.  $A_0$ ) est le dual de  $B_0$  (resp.  $B$ ) (resp.  $B_1$ ),  $A$  est de type  $\mathcal{K}_\theta$ , avec  $\theta' = 1 - \theta$  [10].

LEMME IV.3.4. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach tels que  $E \subset F$  et  $A$  une partie de  $E$  alors

$$\forall n_1 \forall n_2, d_{n_1+n_2}(A, F) \leq d_{n_1}(A, E) \cdot d_{n_2}(SE, F).$$

Soit  $\delta_{n_1} \in \mathbb{R}^+$  tel que  $d_{n_1}(A, E) < \delta_{n_1}$ . Il existe un sous-espace  $L_{n_1}$  de dimension  $n_1$  de  $E$  tel que pour tout  $x \in A$  il existe  $y_x \in L_{n_1}$  et  $\|x - y_x\|_E < \delta_{n_1}$ .

De même, si  $\delta_{n_2} \in \mathbb{R}^+$  est tel que  $d_{n_2}(SE, F) < \delta_{n_2}$  il existe un sous-espace  $L_{n_2}$  de dimension  $n_2$  de  $F$  et un élément  $z \in L_{n_2}$  tels que

$$\left\| \frac{x - y_x}{\delta_{n_1}} - z \right\|_F < \delta_{n_2}$$

soit

$$\|x - (y_x + \delta_{n_1} z)\|_F < \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2},$$

$L_{n_1+n_2} = L_{n_1} + L_{n_2}$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  de dimension au plus  $n_1 + n_2$  tel que pour tout  $x \in A$  il existe un élément  $y_x + \delta_{n_1} z \in L_{n_1+n_2}$  qui vérifie

$$\|x - (y_x + \delta_{n_1} z)\|_F < \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2}$$

ce qui implique

$$d_{n_1+n_2}(A, F) \leq d_{n_1}(A, E) \cdot d_{n_2}(SE, F).$$

#### 4. Démonstration du théorème IV.1.

a. *Majoration.* Pour  $s \in \mathbb{N}$  et  $t = 0$  c'est un cas particulier du théorème 5.1 de Birman et Solomjak [3].

$$d_n(SW^{k,p}(J), L^p(J)) \leq c \cdot n^{-k/m}.$$

On passe facilement au tore  $\mathbb{T}^m$

$$d_n(SW^{k,p}(\mathbb{T}^m), L^p(\mathbb{T}^m)) \leq c \cdot n^{-k/m}$$

et à l'aide du lemme IV.2 à  $s \in \mathbb{Z}$  et  $t \in \mathbb{Z}$

$$d_n(SW^{s,p}(\mathbb{T}^m), W^{t,p}(\mathbb{T}^m)) \leq c \cdot n^{-(s-t)/m}.$$

On revient au cube  $J$  en utilisant un opérateur de prolongement simultané  $\tilde{\omega}: W^{s,p}(J) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$ .

Pour  $s$  et  $t$  réel positifs. \* Soit  $k$  un entier positif supérieur à  $t$ .  $W^{k,p}(J)$  est de classe  $\mathcal{H}^\theta$  entre  $W^{k+1,p}(J)$  et  $W^{t,p}(J)$  avec  $k = \theta t + (1 - \theta)(k + 1)$ . D'après l'inégalité (1) du lemme IV.3.3

$$\begin{aligned} d_n(SW^{k,p}(J), W^{t,p}(J)) &\leq c \cdot [d_n(SW^{k+1,p}(J), W^{k,p}(J))]^{(1-\theta)/\theta} \\ &\leq c \cdot n^{-(1-\theta)/m\theta} = c \cdot n^{-(k-t)/m}. \end{aligned}$$

\*\* Soit  $k$  un entier positif supérieur à  $s \cdot W^{s,p}(J)$  est de classe  $\mathcal{K}^\theta$  entre  $W^{k,p}(J)$  et  $W^{t,p}(J)$  avec  $s = \theta t + (1 - \theta)k$ . D'après l'inégalité (2) du lemme IV.3.3

$$\begin{aligned} d_n(SW^{s,p}(J), W^{t,p}(J)) &\leq c \cdot [d_n(SW^{k,p}(J), W^{t,p}(J))]^{1-\theta} \\ &\leq c \cdot n^{-(k-t)(1-\theta)/m} = c \cdot n^{-(s-t)/m}. \end{aligned}$$

Pour  $s$  et  $t$  réels. Il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $s + k$  et  $t + k$  soient positifs. D'après le lemme IV.2 il existe un isomorphisme  $I_k$  de  $W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$  (resp.  $W^{t,p}(\mathbb{T}^m)$ ) sur  $W^{s+k,p}(\mathbb{T}^m)$  (resp.  $W^{t+k,p}(\mathbb{T}^m)$ ).

On a donc

$$d_n(SW^{s,p}(\mathbb{T}^m), W^{t,p}(\mathbb{T}^m)) \approx d_n(SW^{s+k,p}(\mathbb{T}^m), W^{t+k,p}(\mathbb{T}^m))$$

et

$$d_n(SW^{s,p}(\mathbb{T}^m), W^{t,p}(\mathbb{T}^m)) \leq c \cdot n^{-(s-t)/m}.$$

On revient au cube  $J$  en utilisant un opérateur de prolongement simultané  $\bar{\omega}: W^{s,p}(J) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{T}^m)$ .

*b. Minoration.* Pour  $s \in \mathbb{N}$  et  $t = 0$  c'est un cas particulier du théorème III.1. Dans la minoration on a en fait aussi démontré que

$$d_n(SW^{k,p}(J), L^p(J)) \geq c \cdot n^{-k/m}.$$

Le lemme IV.2 nous permet de passer à  $s$  et  $t$  entiers positifs.

Pour  $s$  et  $t$  réels positifs. \* Pour tout entier  $k < s$ , il existe un entier  $h$  tel que

$$W^{k+h,p}(J) \hookrightarrow W^{s,p}(J) \hookrightarrow W^{k,p}(J).$$

D'après le lemme IV.3.4

$$\begin{aligned} c' \cdot n^{-h/m} &\leq d_{2n}(SW^{k+h,p}(J), W^{k,p}(J)) \\ &\leq d_n(SW^{k+h,p}(J), W^{s,p}(J)) \times d_n(SW^{s,p}(J), W^{k,p}(J)) \\ c' \cdot n^{-h/m} &\leq c'' n^{-(k+h-s)/m} d_n(SW^{s,p}(J), W^{k,p}(J)) \end{aligned}$$

et

$$d_n(SW^{s,p}(J), W^{k,p}(J)) \geq c \cdot n^{-(s-k)/m}.$$

\* Soit  $k$  un entier strictement inférieur à  $t$

$$W^{s,p}(J) \hookrightarrow W^{t,p}(J) \hookrightarrow W^{k,p}(J).$$

D'après le lemme IV.3.4

$$\begin{aligned} c' \cdot n^{-(s-k)/m} &\leq d_{2n}(SW^{s,p}(J), W^{k,p}(J)) \\ &\leq d_n(SW^{s,p}(J), W^{t,p}(J)) \times d_n(SW^{t,p}(J), W^{k,p}(J)) \\ &\leq c'' \cdot d_n(SW^{s,p}(J), W^{t,p}(J)) \cdot n^{-(t-k)/m} \end{aligned}$$

et

$$d_n(SW^{s,p}(J), W^{t,p}(J)) \geq c \cdot n^{-(s-t)/m}.$$

Le lemme IV.2 nous permet de passer à  $s$  et  $t$  réels de signe quelconque.

5. *Généralisations.* (a) Le théorème IV.1 est encore valable si on remplace  $J$  par  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega}$  étant une variété à bord  $C^\infty$ , compacte, de dimension  $m$ . La démonstration se fait par cartes locales et partition de l'unité.

(b) On appelle opérateur de  $s$ -prolongement relatif à un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  et à  $p$ , un opérateur  $\bar{\omega}$  (s'il existe) linéaire et continu de  $W^{s,p}(\Omega)$  dans  $W^{s,p}(\mathbb{R}^m)$  tel que  $\rho \circ \bar{\omega} = id_{W^{s,p}(\Omega)}$  où  $\rho$  est l'opérateur restriction.

On dit qu'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  a la propriété de prolongement simultané s'il existe un opérateur de prolongement  $\bar{\omega}$  indépendant de  $s$  et  $p$  [1, 8, 14].

Le théorème IV.1 est encore valable si on remplace  $J$  par  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^m$  ayant la propriété de prolongement simultané. Pour la minoration il n'y a rien à changer à la démonstration car,  $\Omega$  étant borné, on peut se ramener au cas où  $J \subset \Omega$ . Pour la majoration on passe de  $J$  à  $\Omega$  en utilisant l'opérateur  $\bar{\omega}$ .

## V. ESPACES AVEC DEUX POIDS

*Notations.*  $J = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ;  $1 \leq p \leq +\infty$ ;  $\beta, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  réels.

$$E_{\alpha_1, \alpha_2} = \{u; x^{\alpha_1} u_{x'} \in L^p(J), y^{\alpha_2} u_{y'} \in L^p(J); u|_{\partial J} = 0\},$$

$$E_{\alpha, \alpha} = E_\alpha,$$

$$\|u\|_{E_{\alpha_1, \alpha_2}} = (\|u\|_{L^p(J)}^p + \|x^{\alpha_1} \cdot u_{x'}\|_{L^p(J)}^p + \|y^{\alpha_2} \cdot u_{y'}\|_{L^p(J)}^p)^{1/p},$$

$$L_{\beta, 0}^p(J) = \{u; x^\beta u \in L^p(J)\},$$

$$L_{0, \beta}^p(J) = \{u; y^\beta u \in L^p(J)\}.$$

LEMME V.1. Pour  $1 < p \leq +\infty$ ,  $\alpha + 1/p \neq 1$

$$E_\alpha \hookrightarrow L_{\alpha-1, 0}^p(J) \quad \text{et} \quad E_\alpha \hookrightarrow L_{0, \alpha-1}^p(J).$$

Démonstration identique à celle du lemme III.1 en utilisant l'inégalité de Hardy.

PROPOSITION V.1. Pour  $1 < p \leq +\infty$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ ,

$$d_n(SE_{\alpha_1, \alpha_2}, L^p(J)) \approx n^{-1/2}.$$

*Minoration.*

$$\dot{W}^{1,p}(J) \hookrightarrow E_{\alpha_1, \alpha_2} \hookrightarrow L^p(J)$$

et

$$d_n(SE_{\alpha_1, \alpha_2} L^p(J)) \geq d_n(S\dot{W}^{1,p}(J), L^p(J)) \geq c \cdot n^{-1/2}.$$

*Majoration.*

$$\begin{aligned} \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) \quad E_{\alpha_1, \alpha_2} &\hookrightarrow E_\alpha \hookrightarrow L^p(J) \\ d_n(SE_{\alpha_1, \alpha_2}, L^p(J)) &\leq d_n(SE_\alpha, L^p(J)) \end{aligned}$$

et il suffit de majorer  $d_n(SE_\alpha, L^p(J))$ .

(1) Sur  $]0, \delta[ \times ]0, 1[$  et  $] \delta, 1[ \times ]0, \delta[$  on approche  $u$  par 0. Si  $\alpha + 1/p \neq 1$  de  $E_\alpha \hookrightarrow L_{\alpha-1,0}^p(J) \hookrightarrow L^p(J)$

on déduit par changement de variable

$$\int_0^\delta dx \int_0^1 |u(x, y)|^p dy \leq c^p \cdot \delta^{p-p\alpha} \|u\|_{E_\alpha}^p \quad (1)$$

de  $E_\alpha \hookrightarrow L_{0, \alpha-1}^p(J) \hookrightarrow L^p(J)$  on déduit par changement de variable

$$\int_\delta^1 dx \int_0^\delta |u(x, y)|^p dy \leq c^p \delta^{p-p\alpha} \|u\|_{E_\alpha}^p \quad (2)$$

si  $\alpha + 1/p = 1$ , il existe  $\alpha'$  tel que  $\alpha < \alpha' < \frac{1}{2}$  et  $\alpha' + 1/p \neq 1$ . Du fait que  $E_\alpha \hookrightarrow E_{\alpha'}$  on déduit

$$\int_0^\delta dx \int_0^1 |u(x, y)|^p dy \leq c^p \delta^{p-p\alpha'} \|u\|_{E_\alpha}^p, \quad (1')$$

$$\int_\delta^1 dx \int_0^\delta |u(x, y)|^p dy \leq c^p \delta^{p-p\alpha'} \|u\|_{E_\alpha}^p. \quad (2')$$

Pour  $\epsilon > 0$  donné on prend

$$\begin{aligned} \delta &= (c^{-1}\epsilon)^{1/(1-\alpha)} & \text{si } \alpha + 1/p \neq 1, \\ \delta &= (c^{-1}\epsilon)^{1/(1-\alpha')} & \text{si } \alpha + 1/p = 1. \end{aligned}$$

On approche ainsi  $u$  à  $\epsilon$  près sur chaque pavé  $]0, \delta[ \times ]0, 1[$  et  $] \delta, 1[ \times ]0, \delta[$ .

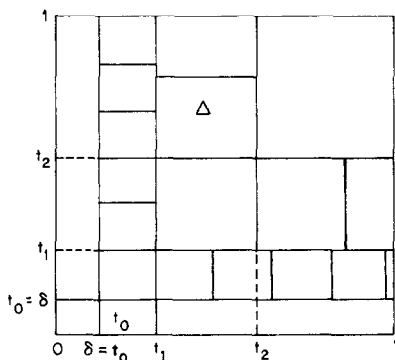


(2) On partage maintenant  $]\delta, 1[ \times ]\delta, 1[$  en cubes  $\Delta$ . Sur chaque cube  $\Delta$  on approche  $u$  par sa moyenne

$$P_{\Delta}u = 1/|\Delta| \int_{\Delta} u(x, y) dx dy.$$

On obtient les cubes  $\Delta$  de la manière suivante:

On divise  $]\delta, 1[$  par des points  $t_0 = \delta, t_1, \dots, t_h \geq 1$ . Chacune des deux bandes de largeur  $(t_1 - t_0)$  est subdivisée en cubes de côté  $(t_1 - t_0)$  et d'une manière générale celles de largeur  $(t_j - t_{j-1})$  en cubes de côté  $l_j = t_j - t_{j-1}$ .



On détermine  $l_j$  de manière à avoir

$$\int_{\Delta} |u(x, y) - P_{\Delta}u|^p dx dy \leq \epsilon^p \int_{\Delta} (x^{p\alpha} |u_x'(x, y)|^p + y^{p\alpha} |u_y'(x, y)|^p) dx dy.$$

Alors si on appelle  $\Xi$  la subdivision de  $J$  obtenue et  $P_{\Xi}$  l'opérateur qui, à  $u$ , fait correspondre 0 pour  $x < \delta$  ou  $y < \delta$  et  $P_{\Delta}u$  pour  $(x, y) \in \Delta$

$$\int_{\delta}^1 \int_{\delta}^1 |u(x, y) - P_{\Xi}u|^p dx dy \leq \epsilon^p \cdot \|u\|_{E_{\alpha}}^p$$

soit

$$\|u - P_{\Xi}u\|_{L^p(J)} \leq \epsilon \cdot \|u\|_{E_{\alpha}}.$$

*Détermination de  $l_j$ .* D'après l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} |u(x, y) - P_{\Delta}u|^p dx dy \\ & \leq c \cdot (t_j - t_{j-1})^p \int_{\Delta} (|u_x'(x, y)|^p + |u_y'(x, y)|^p) dx dy. \end{aligned}$$

Comme sur  $\Delta$ ,  $x > t_{j-1}$  et  $y > t_{j-1}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} |u(x, y) - P_{\Delta} u|^p dx dy \\ & \leq c \frac{(t_j - t_{j-1})^p}{t_{j-1}^{\alpha p}} \int_{\Delta} (x^{p\alpha} |u'_x(x, y)|^p + y^{p\alpha} |u'_y(x, y)|^p) dx dy \end{aligned}$$

si  $\max_j c l_j^p t_{j-1}^{-\alpha p} \leq \epsilon^p$

$$\int_{\delta}^1 \int_{\delta}^1 |u(x, y) - p_{\Delta} u|^p dx dy \leq \epsilon^p \|u\|_{E_{\alpha}}^p.$$

La détermination de  $l_j$  a été faite au cours de la démonstration du théorème III.1. On trouve

$$l_j \approx \epsilon^{1/(1-\alpha)} j^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad t_j \approx \epsilon^{1/(1-\alpha)} j^{1/(1-\alpha)}$$

et  $h \approx \epsilon^{-1}$  pour  $h$  tel que  $t_{h-1} < 1 \leq t_h$ .

Évaluons le nombre  $n$  de pavés de la subdivision de  $J$ .

$$\begin{aligned} n &= \sum_{j=1}^h 2 \frac{1 - t_j}{l_j} + 2h - 1 < 2 \cdot \sum_{j=1}^h l_j^{-1} + 2h - 1 \\ \sum_{j=1}^h l_j^{-1} &\approx \epsilon^{-1/(1-\alpha)} \sum_{j=1}^h j^{-\alpha/(1-\alpha)} \approx \epsilon^{-1/(1-\alpha)} h^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)} \approx \epsilon^{-2} \end{aligned}$$

et

$$2 \sum_{j=1}^h l_j^{-1} + h + 3 \approx \epsilon^{-2}.$$

Il existe une constante positive  $c$  telle que  $\epsilon \leq c \cdot n^{-1/2}$  et

$$d_n(SE_{\alpha}, L^p(J)) \leq c \cdot n^{-1/2}.$$

Dans le cas où  $p = +\infty$  la démonstration se fait de la même manière.

## BIBLIOGRAPHIE

1. N. ARONSZAJN, R. ADAMS, AND K. T. SMITH, Theory of Bessel Potentials Part II, *Ann. Inst. Fourier*, Tome XVII, Fasc. 2, 1967.
2. M. S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC, Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **34** (1969), 361.
3. M. BIRMAN ET M. Z. SOLOMJAK, Approximation polynomiale par morceaux des fonctions de classe  $W^{\alpha,p}$ , *Math. Sbor.* **73** (1967), 3.
4. P. BOLLEY ET J. CAMUS, "Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids," Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Université de Rennes, 1968-69.

5. L. BOUTET DE MONVEL ET P. GRISVARD, I, "Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un problème aux limites" C.R.A.S., t. 272, 4 janvier 1971, Paris. 2. "The asymptotic behaviour of the eigenvalues of an operator related to width of ball," Istituto Nazionale di alta matematica Symposia Mathematica, Vol. VII, 1971.
6. P. GRISVARD, Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids, *Scuola Normale Superiore Pisa* **17** (1963).
7. A. N. KOLMOGOROV, Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Funktionenklasse *Ann. Math.* **37** (1936), 107–111.
8. J. L. LIONS, "Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles," Séminaire de Math. Sup., Montréal, 1962.
9. J. L. LIONS ET E. MAGENES, *Scuola Normale Superiore Pisa* **15** (1961), 39–101.
10. J. L. LIONS ET J. PEETRE, "Sur une classe d'espaces d'interpolation," I.H.E.S., n° 19, 1964.
11. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions," pp. 137–139, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1966.
12. J. MARCINKIEWICZ, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, *Stud. Math.* **8** (1939).
13. MIHLIN, "Intégrales singulières à plusieurs variables et équations intégrales," Moscou, 1962.
14. R. T. SEELEY, Extension of  $C^\infty$  functions defined in a half space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964).
15. M. Z. SOLOMJAK ET V. H. TIHOMIROV, Geometric characteristics of imbedding of the classes  $W^{\alpha,p}$  in  $C$ , *Izo Vysš Učeb. Zaved Matematika* **10** (1967), 76–82.
16. A. EL KOLLI, nième épaisseur dans les espaces de Sobolev, thèse Alger, 1969.
17. A. MOSTEFAÏ,  $\epsilon$ -entropie dans les espaces de Sobolev, thèse Alger, 1970.
18. A. CHERIF, Comportement asymptotique des valeurs propres de certains opérateurs elliptiques dégénérés, thèse Nice, 1971.
19. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, ET G. POLYA, "Inequalities," Cambridge University Press, New York, 1934.
20. J. W. JEROME, Asymptotic estimates of the  $n$ -widths in Hilbert Space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **33** (1972), 367–372.
21. C. B. MORREY, "Multiple Integrals in the Calculus of Variations," p. 69, Springer Verlag, New York, 1966.
22. C. NORDIN, "The asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator, *Ark. Mat.* **10** (1972), 9–21.
23. V. M. TIHOMIROV, Diameters of sets in function spaces and theory of best approximation, *Russian Math. Surveys* **15** (1960), 107.
24. A. ZYGMUND, "Trigonometric Series," Cambridge University Press, New York, 1959.